Title	無限分解可能な確率過程 (定常過程研究会報告集)
Author(s)	丸山, 儀四郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1967), 20: 85-99
Issue Date	1967-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/107456
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
20巻 1967年 85-99

無限分解可能な確率過程

東京教育大　丸山儀四郎

§1 無限分解可能な確率過程とLévy測度

確率空間 $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率過程 $\xi = (\xi_t(\alpha), t \in T, \alpha \in \mathcal{S})$, $T = (-\infty, \infty)$ に対し、任意の T の部分集合 $\lambda = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ について、$\xi_\lambda \equiv (\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n})$ が無限分解可能な法則に従うとき、ξ を無限分解可能な確率過程(infinitely divisible process)(IDPと略記)とよぶ。今後は便宜上Gauss成分のないIDPを対象とする。

T の有限部分集合の全体 Λ を包含関係 $\lambda \subset \mu$ によって $\lambda \leq \mu$ と順序づけた有向集合を考える。R^T (又は R^λ, $\lambda \in \Lambda$) の t-成分を $f(t, x)$ とかく。そして

$$X = \bigcup_{t \in T} \{ x : f(t, x) \neq 0 \}$$

(1.1)

$$X_\lambda = \bigcup_{t \in \lambda} \{ x : x \in R^\lambda, \ f(t, x) \neq 0 \}$$

とおく。R^λ は集合としては R^n と同一。

$f_{\lambda\mu}$ $(\lambda \leq \mu)$ を R^μ から R^λ への射影, $f_{\lambda\infty}$

を R^Γ から R^λ の射影とする；ただし $f_{\lambda\lambda}$ は恒等写像。

(1.2) $D_{\lambda\mu}=f_{\lambda\mu}^{-1}X_\lambda$, $D_{\lambda\infty}=f_{\lambda\infty}^{-1}X_\lambda$, $\lambda\leq\mu$

とおき，$D_{\lambda\mu}$，$D_{\lambda\infty}$ を定義域とする写像 $g_{\lambda\mu}$，$g_{\lambda\infty}$ を

(1.3) $g_{\lambda\mu}x=f_{\lambda\mu}x$, $x\in D_{\lambda\mu}$

$$g_{\lambda\infty}x=f_{\lambda\infty}x, \quad x\in D_{\lambda\infty}$$

と定義する。すると

(1.4) $g_{\lambda\mu}g_{\mu\nu}=g_{\lambda\nu}$, $g_{\lambda\mu}g_{\mu\infty}=g_{\lambda\infty}$, $\lambda\leq\mu\leq\nu$.

(1.5) $D_{\mu\nu}\supset D_{\lambda\nu}$, $D_{\mu\infty}\supset D_{\lambda\infty}$, $\lambda\leq\mu\leq\nu$,

$$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}D_{\lambda\infty},$$

$\alpha\cup\beta=\gamma$ ならば $D_{\gamma\infty}=D_{\alpha\infty}\cup D_{\beta\infty}$.

いま Λ の増加点列 (1) $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$ と，これに対応する点列 (2) $\{x_i\in X_{\lambda_i}, 1\leq i<\infty\}$ が条件

(1.6) $x_i=g_{\lambda_i\lambda_{i+1}}x_{i+1}$, $1\leq i<\infty$

をみたすように与えられたとする。すると $f_{\lambda\mu}$ と同様に，$g_{\lambda\mu}$ はつぎの条件をみたす。

(P) $x_\infty \in X$ が存在して (1.7) $x_i = g_{\lambda_i\infty} x_\infty,\ 1 \leq i < \infty$.

ξ の有限次元分布を特性函数を用いて表わせば

$$C_\lambda(z) = E e^{i(z,\xi_\lambda)_n}$$

$$(1.8) \quad = \exp\left\{ \int_{X_\lambda} \left[e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k \right] Q_\lambda(du) + i(b_\lambda, z)_n \right\},$$

ただし

$\lambda = (t_1, \cdots, t_n)$, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in R^n$, $u = (u_1, \cdots, u_n) \in R^n$, $b_\lambda = (b_{\lambda 1}, \cdots, b_{\lambda n}) \in R^n$, $a(x) = x\ (|x| \leq 1)$, $= 1\ (|x| > 1)$; $(\ \ )_n$ は R^n の内積, Q_λ は $X_\lambda = R^n - \{0\}$ 上の Lévy 測度で, 従って

$$\int_{X_\lambda} \frac{|u|_n^2}{1 + |u|_n^2} Q_\lambda(du) < \infty,$$

こゝに $|\ \ |_n$ は R^n の距離.

R^n の部分空間 X_λ $(\lambda = (t_1, \cdots, t_n))$ 上のボレル集合を $\mathcal{B}_\lambda$ とする。

1° $\lambda \leq \mu$ に対して $g_{\lambda\mu}$ は $(D_{\lambda\mu}, D_{\lambda\mu}\mathcal{B}_\mu, Q_\mu)$ から $(X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda)$ への homomorphism, $Q_\lambda = g_{\lambda\mu} Q_\mu$, である。$T$ 上の実函数 $b(t)$, $t \in T$,

が存在して

$$(1.9)\qquad b_{\lambda k} = b(t_k), \quad 1 \leq k \leq n, \quad \lambda = (t_1, \cdots, t_n),$$

これ $b_\lambda = (b_{\lambda 1}, \cdots, b_{\lambda n})$ は (1.8) で定まるもの。

<u>証明</u>　明らかに $\lambda = (t_1, \cdots, t_n)$, $\mu = (t_1, \cdots, t_n, t_{n+1})$ とおいて命題を証明すればよい。$z' = (z_1, \cdots, z_{n+1}) \in R^{n+1}$, $u' = (u_1, \cdots, u_{n+1}) \in R^{n+1}$ とおけば

$$C_\lambda(z) = C_{\lambda'}(z')\Big|_{z_{n+1}=0}$$

であるから

$$(1.10)\qquad C_\lambda(z) = \exp\left\{\int_{X_\mu}\left(e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k\right) Q_\mu(du') + i\sum_{k=1}^{n} b_{\mu k} z_k\right\}.$$

(1.10) の右辺の積分は分解されて

$$\left(\int_{X_\mu \cap (u_1^2 + \cdots + u_n^2 \neq 0)} + \int_{X_\mu \cap (u_1 = \cdots = u_n = 0)}\right) \times \left(e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k\right) Q_\mu(du')$$

(1.11)

$$= \int_{D_{\lambda\mu}} \left(e^{i(z, g_{\lambda\mu} u')_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k\right) Q_\mu(du')$$

$$= \int_{D_\lambda} \left(e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k \right) g_{\lambda\mu} Q_\mu (du),$$

ただし
$g_{\lambda\mu} Q_\mu$は homomorphism $g_{\lambda\mu}$ によって Q_μ から X_λ に導かれた測度で $R^{(n)} - \{0\}$ のボレル集合 $A^{(n)}$に対し

$$g_{\lambda\mu} Q_\mu (A^{(n)}) = Q_\mu (g_{\lambda\mu}^{-1} A^{(n)}).$$

(1.8) の右辺と (1.11) の右辺をと比較して、

(1.12) $\qquad Q_\lambda = g_{\lambda\mu} Q_\mu$

(1.13) $\qquad b_{\lambda k} = b_{\mu k}, \quad 1 \leq k \leq n.$

(1.13)は、T 上の実函数 $b(t)$ が存在して (1.9) が成立することを示すものである。かくて定まる $b(t)$ を ξ の平均函数とよぶ。（ξ_t の平均が $b(t)$であることを意味するものではない。

上記から、Lévy measure の system に対応して測度空間の system $\{X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda\}$ が定まる, $\mathcal{B}_\lambda$ は位相的 σ－代数, Q_λ は σ－有限な Radon measure, 即ち任意の $E \in \mathcal{B}_\lambda$, $\delta > 0$, $Q_\lambda(E) < \infty$, に対して, コンパクトな $K_\delta \subset E$ が存在して, $Q_\lambda(E - K_\delta) < \delta$.

$\lambda \leq \mu$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, に対して領域 $D_{\lambda\mu} \subset X_\mu$ から X_λ 上への連続写像が $(D_{\lambda\mu}, D_{\lambda\mu}\mathcal{B}_\mu, Q_\mu)$ から $(X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda)$ への準同型写像 $g_{\lambda\mu}$ であるような, i.e.

(1.14)　$g_{\lambda\mu}^{-1}\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu D_{\lambda\mu}$

$$Q_\mu(g_{\lambda\mu}^{-1}E) = Q_\lambda(E) \quad , \quad E \in \mathcal{B}_\lambda ,$$

$$g_{\lambda\mu}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (\lambda \leqq \mu \leqq \nu) ;$$

および任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して集合 $D_{\lambda\infty} \subset X$ から X 上への写像 $g_{\lambda\infty}$ で

(1.15)　$g_{\lambda\mu}g_{\mu\infty} = g_{\lambda\infty}$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_{\lambda\infty} = X$

をみたすものが存在する。また $g_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\infty}$ は条件(P)をみたすことが容易に示される。

$$\mathcal{B}_\lambda^* = g_{\lambda\infty}^{-1}(\mathcal{B}_\lambda), \quad Q_0(A^*) = Q_\lambda(g_{\lambda\infty}A^*)$$
$$A^* \in \mathcal{B}_\lambda^*$$

とおけば

$$\mathcal{B}_\lambda^* \subset \mathcal{B}_\mu^* \quad (\lambda \leqq \mu),$$

Q_0 の定義は consistent , i.e. $A^* \in \mathcal{B}_\lambda^* \cap \mathcal{B}_\mu^*$ であれば $Q_\lambda(g_{\lambda\infty}A^*) = Q_\mu(g_{\mu\infty}A^*)$ である。

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda^*$$

とおけば $\mathcal{B}_0$ は有限加法的環であって $(X, \mathcal{B}_0, Q$ は有限加法的な測度空間である。吾々の基本定理は

定理　$\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}_0$ から生成される最小の σ―環とすれば，Q_0 は $\mathcal{B}$ 上の測度 Q に一意に

拡張される。一般に，$(X, \mathcal{B}, Q)$ は σ－有限ではない。

この結果は Bochner の方法 [ ] の変形であって概略つぎのような手順で証明される。

$1°$ $\mathcal{B}_0^\lambda = D_{\lambda\infty}\mathcal{B}_0$ とおけば $(D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}_0^\lambda, Q_0)$ は有限加法的な測度空間である。

$2°$ $(D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}_0^\lambda, Q_0)$ は σ－有限，σ－加法的な測度空間 $(D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}^\lambda, Q)$ に拡張（一意に）される。

この命題の証明は Bochner [ ] と同様である。X_λ はは σ－有限であるから，$D_{\lambda\infty}$ も然り，i.e.

$$D_{\lambda\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathcal{B}_0^\lambda, \quad Q_0(E_n) < \infty,$$

E_n は互に disjoint. 証明のためにはつぎのことを示せばよい：$S_n^* \in \mathcal{B}_0^\lambda$, $S_1^* \supset S_2^* \supset \cdots$, $Q_0(S_1^*) < \infty$, $Q_0(S_n^*) \geq \alpha > 0$, α は n に無関係，ならば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^* \neq \phi$$

Λ の有向性を用いて，つぎのように考えることができる。Λ の増加列 $\lambda_n (\geq \lambda)$, $1 \leq n < \infty$, と $S_n \in \mathcal{B}_{\lambda_n}$ があって，

$$S_n^* = g_{\lambda_n\infty}^{-1} S_n, \quad 1 \leq n < \infty,$$

コンパクトな $\tilde{K}_n \subset S_n$ を $Q_{\lambda_n}(S_n - \tilde{K}_n) \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}}$,

をみたすようにとり

$$K_n^* = \bigcap_{\nu=1}^{n} g_{\lambda_\nu \infty}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$$

とおけば $S_n^* \supset K_n^*$，また $Q_0(S_n^*) - Q_0(K_n^*) \leq \frac{\alpha}{2}$ であるから，$Q_0(K_n^*) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$．また一方 $\bigcap_{\nu=1}^{n} g_{\lambda_\nu \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$ $\left(g_{\lambda_n \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_n) = \tilde{K}_n \text{ はコンパクト}\right)$

はコンパクであるから

(1.16) $\quad K_n \equiv g_{\lambda_n \infty}(K_n^*) = \bigcap_{\nu=1}^{n} g_{\lambda_\nu \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$

はコンパクトであり，$Q_{\lambda_n}(K_n) = Q_0(K_n^*) > 0$，従って $K_n \neq \phi$．このことから，$(K_n, \lambda_n, 1 \leq n\ \infty)$ の部分列 $(L_n, \mu_n, 1 \leq n < \infty)$ と $x_n \in L_n$, $1 \leq n < \infty$，が存在して $x_n = g_{\mu_n \mu_{n+1}} x_{n+1}$ をみたす。よって (P) より $x_\infty \in D_{\mu_1 \infty}$ が存在して，$x_n = g_{\mu_n \infty} x_\infty \in L_n$ をみたし，$x_\infty \in g_{\mu_n \infty}^{-1} L_n = K_{m_n}^*$．従って

$$x_\infty \in \bigcap_{n \geq 1} K_{m_n}^* = \bigcap_{n \geq 1} K_n^* \subset \bigcap_{n \geq 1} S_n^*.$$

明らかに $\lambda \leq \mu$ ならば

(1.17) $\quad (D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}^\lambda, Q) \subset (D_{\mu\infty}, \mathcal{B}^\mu, Q)$

$\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$ をそれぞれ M，M' 上の σ－代数とするとき，二つの測度空間 $(M, \mathcal{B}, \mu)$，$(M', \mathcal{B}', \mu')$ が条件：$\mathcal{D} \equiv M \cap M' \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$，$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{D}\mathcal{B}'$，$\mathcal{D}\mathcal{B}$ 上では $\mu = \mu'$ をみたすとき，両測度空間は互に延長であるという。

(1.17)の関係より，任意の λ, μ に対して $(D_{\lambda\infty}, \mathfrak{B}^{\lambda}, Q)$ と $(D_{\mu\infty}, \mathfrak{B}^{\mu}, Q)$ は互に延長になっている。

$$(1.18) \quad \mathfrak{B} = \left\{ \Gamma \;\middle|\; \Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n ,\ \Gamma_n \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{B}^{\lambda} \right\}$$

とおけば $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{B}_0$ の決定する最小の σ-ring であって(1.17)の関係より，Γ_n は互に disjoint, λ_n が存在して

$$(1.19) \qquad \Gamma_n \in \mathfrak{B}^{\lambda_n}, \quad 1 \leq n < \infty,$$

とすることができる。そこで

$$(1.20) \qquad Q(\Gamma) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\lambda_n}(\Gamma_n)$$

とおいて Q を定義する。すると Q の定義は consistent であり，Q は σ-加法的となることが証明される。

任意の $A \in \mathfrak{B}$ 上で Q を考えれば，(A, Q) は σ-有限な測度空間であり，かくして集合 $A, B \in \mathfrak{B}$ は測度空間として互に延長になる。X 上の実函数 $f(x) \geq 0$ に対して $\mathrm{Car}\, f = (x : f(x) \neq 0) \in \mathfrak{B}$ ならば $X_0 \subset X$ が $X_0 \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$ を満足するものであれば，$\mathrm{Car}\, f \subset D \in \mathfrak{B}$ をみたす D に対して

$$\int_{X_0} f(x)\, Q(dx) \equiv \int_{X_0 D} f(x)\, Q(dx)$$

とおいて右辺を定義すれば（右辺は通常の意味で定まる）その値は D のとりかたに無関係である。この右辺をもって X 上の f の積分を定義する。

§2 Poisson random measure.

$(X, \mathcal{B}, Q)$ を測度空間，$\mathcal{B}$ を X 上の σ-ring とする（X は必ずしも σ-finite でない）。$\mathcal{C} = \{A \mid A \in \mathcal{B},\ Q(A) < \infty\}$ とおき，$(\pi(A), A \in \mathcal{C})$ を Q に対応する Poisson random measure, i.e. $\pi(A)$ は $E(\pi(A)) = Q(A)$ をみたし Poisson 分布に従い，$A_i \in \mathcal{C}$，A_i は互に disjoint，$1 \leq i \leq n$，ならば $(\pi(A_i), 1 \leq i \leq n)$ は独立な変数系である。

$\mathcal{G}$ を条件:

$$(2.1)\quad \mathrm{Car} f \in \mathcal{B}, \quad \int_X \frac{f^2(x)}{1+f^2(x)} Q(dx) < \infty$$

をみたし $\mathcal{B}$ 可測な実函数の族 ($\longleftrightarrow$ $\mathrm{Car} f \cap (f(x) \leq a) \in \mathcal{B}$) とする。$f \in \mathcal{G}$ に対しては

$$(2.2)\quad I(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{ in prob.} \left(\int_{|f(x)| > \varepsilon} f(x) \pi(dx) - \int_{|f(x)| > \varepsilon} a(f(x)) Q(d$$

が存在する。

$f_k \in \mathcal{G}$, $1 \leq k \leq n$, に対して $I(f_k)$ の分布は特性函数の対数

$$\log E \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} z_k I(f_k)\right)$$

$$(2.3) \quad = \int_X \left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} z_k f_k(x)\right) - 1 - i\sum_{k=1}^{n} z_k a(f_k(x))\right] Q(dx),$$

によって与えられる。

1° $\{I(f_k),\ f_k \in \mathcal{G},\ 1 \leq k \leq n\}$ が独立な確率変数であるための必要充分な条件は $\mathrm{Car}\, f_k$, $1 \leq k \leq n$, が Q-測度 0 の集合を無視して，互に disjoint になることである。

このことは (2.3) を用いて容易に証明される。

<u>定理</u> (1.12), (1.13) をみたす函数 $b(t)$, $t \in T$, と X_λ 上の測度 Q_λ, $\lambda \in \Lambda$ が与えられれば，Q_λ, $b(t)$ を Lévy 測度，平均函数とする IDP が存在する。 IDP ξ が与えられれば，Poisson random measure を用いて ξ と同じ法則に従う IDP を構成することができる。

<u>証明</u> π を Q に対応する Poisson random measure とする。 すると $x \in X$ の t-座標 $f(t, x)$;

は

$$\int \frac{f^2(t,x)}{1+f^2(t,x)} Q(dx) = \int_{R\cap(x\neq 0)} \frac{x^2}{1+x^2} Q_{\{t\}}(dx) < \infty,$$

をみたす。

すなわち $f(t,x) \in \mathcal{G}$。

$$y_t = I(f(t,x)) + b(t), \quad t \in T$$

とおく。 $\lambda = (t_1, \cdots, t_n) \subset T$, $x = (x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})$, $z = (z_{t_1}, \cdots, z_{t_n}) \in R^\lambda$ に対して, $y_\lambda = (y_{t_1}, \cdots, y_{t_n})$ の特性函数 の対数は

$$\log C(z) = \int \Big[\exp\Big(i \sum_{k=1}^{n} f(t_k, x) z_{t_k}\Big) - 1$$

$$(2,4) \qquad - i \sum_{k=1}^{n} a(f(t_k, x)) z_{t_k} \Big] Q(dx) + i \sum_{k=1}^{n} b(t_k) z_{t_k}$$

$$= \int g(x) Q(dx) + i \sum_{k=1}^{n} b(t_k) z_k$$

いま

$$h(x) = \exp(i(x, z)_n) - 1 - i \sum a(x) z_k, \quad x \in R^n$$

とおけば $g_{\lambda\infty} x = (f(t_1, x), \cdots, f(t_n, x)), \; x \in X$

であり, 従って

$$\int g(x) Q(dx) = \int h(g_{\lambda\infty} x) Q(dx) = \int_{X_\lambda} h(x) g_{\lambda\infty} Q(dx)$$

$$= \int_{X_\lambda} h(x) Q_\lambda(dx),$$

これを(2,4)の右辺に代入すれば $C(z)$ は与えられた IDP ξ の有限次元の射影 ξ_λ の特性函数に等しいことが分る。

以上、一般の IDP の構成を示してきたが、それについて regularity をもった IDP を示そう。これに精しく述べることはできないが、オ一に確率連続なものを示してみる。

2° IDP ξ が確率連続であるための必要充分な条件は

(a) $b(t)$ は連続

(b) $\displaystyle \lim_{t\to s} Q_{s,t}(|x-y|>\delta,\ x^2+y^2\neq 0)=0$

(c) $\displaystyle \lim_{t\to s} \int_{\substack{|x-y|\leq 1 \\ x^2+y^2\neq 0}} (x-y)^2 Q_{s,t}(dx,dy)=0$

が成立することである。これ $Q_{s,t}$ は (ξ_s, ξ_t) の Lévy measure である。

2° の (a)(b)(c) が満足され、従って ξ が確率連続になるときは Q は σ-有限になる。

これを正確に述べると

3° 2°の(a),(b),(c)が満足されれば，つぎのような $X_0 \in \mathfrak{B}$ がとれる；任意の $A \in \mathfrak{B}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$B_\varepsilon \in X_0\mathfrak{B}$ が存在して

$$Q(A - B_\varepsilon) < \varepsilon.$$

ξ が確率連続でなければ Q は必ずしも σ-有限にならない。たとえば $(\xi_t, t \in T)$ が独立な変数系ならば，Q は X の非可測な部分集合の上に集中することが示されるが，このとき Q は σ-有限にならない。

さて ξ が確率連続であるとき，3°で述べた X_0 に Q を制限することができるのであるが，$\mathfrak{B}$ の元は一般に σ-有限であるから，Q は(X_0 上に制限)σ-有限になる，$X_0 = \bigcup_{n \geq 1} E_n$，$Q(E_n) < \infty$．また容易にわかるように，$f(t,x)$ を $E = E_n$, $1 \leq n$，に制限したものを $f_0(t,x)$，Q を E に制限したものを Q_E とかけば

$$\lim_{t \to s} Q_E(|f_0(t,x) - f_0(s,x)| > \delta) = 0$$

が成立する。それより $f_0(t,x)$，の可測変形がとれる。従って $f(t,x)$, $x \in X_0$，の可測変形がとれる。

ξ が定常過程であれば，$\xi_\lambda \sim \xi_{\lambda'}$ (法則

同値), ただし $\lambda=(t_1,\cdots,t_n)$, $\lambda'=(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau)$. このことから $b(t)=\underset{=b}{\text{constant}}$, $Q_\lambda=Q_{\lambda'}$;

従って, $x\in X$, $x=\{f(t,x),t\in T\}\longrightarrow T_t x=\{f(t+\tau,x),t\in T\}\in X$ とおけば T_t は勿論 X 上の flow (measure をぬきにして) であるが, ボレル集合 $E\subset R^n-\{0\}$ に対して,

$$Q((f(t_1,x),\cdots,f(t_n,x))\in E)$$
$$=Q((f(t_1+\tau,x),\cdots,f(t_n+\tau,x))\in E).$$

また $T_\tau\mathcal{B}\subset\mathcal{B}$ であることも証明される。$Q_\lambda=Q_{\lambda'}$ から $Q(T_\tau A)=Q(A)$, $A\in\mathcal{B}$, であり, 従って T_t は測度空間 $(X,\mathcal{B},Q)$ 上の flow であり, 定常過程 ξ は $I(f(0,T_t x))+b$ と法則同値になるが, T_t on X は可測とは限らない。また T_t を X_0 に制限すると, 正確な意味で, これは flow にならない — T_t は X_0 の 1-1 変換を与えない。これは技術的な問題であるが, 別に "T_t と同等な可測な flow S_t" を適当な空間 Ω 上にとり, その上に Poisson random measure を移して $y_t(\omega)=I(g(S_t\omega))+b$ という形で ξ と法則同値な定常過程を構成できる。定常な IDP の種々の性質については別の機会に述べる。